

第六章 离散鞅论

- 1 条件期望的深度解析
- 事件域与可测性
 - 条件期望的直观引入
 - 条件期望的定义与性质

- 2 公平游戏与鞅
- 引言
 - 鞅的定义及性质
 - 经典例子

- 3 鞅基本定理
- 离散形式的随机积分
 - 停时与停止策略
 - 可选停止定理
 - 经典应用例

- 4 在金融中的应用
- 基本概念
 - 衍生证券定价的第一基本定理
 - 期权的例
 - 二叉树资产定价模型



数学期望是关于随机事件长期平均结果的预测;

条件期望则表明, 随着我们获得更多信息, 这个预测本身也会被动态修正和更新.

第 2.1 节 条件期望

本节目标:

- 理解 σ -代数(亦称事件域)=信息, 可测=已知;
- 掌握条件期望的定义, 核心性质;
- 会用条件期望做简单预测与计算.



核心概念: 信息流(Filtration)

所谓事件域 \mathcal{G} 是指, 样本空间满足某些条件的子集组成的集合.
比如, $\sigma(X)$ 代表了通过观测随机变量 X 所能获得的全部信息.

如果事件域 \mathcal{F}_t ($t \geq 0$) 满足

$$\text{单调性: } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \quad s < t,$$

则称 (\mathcal{F}_t) 为信息流.

这意味着随着时间推移, 我们掌握的信息只增不减.

例如, 时间 t 为止市场上可观测到的所有的信息记为 \mathcal{F}_t ,
相应的信息流就是 (\mathcal{F}_t) .



可测性=已知

设 X 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

定义 2.1.1

如果对任何实数 x , 有 $\{X \leq x\} \in \mathcal{G}$, 则称 X 关于 \mathcal{G} 可测. 也就意味着:

在拥有信息集 \mathcal{G} 的当下, X 的值已经确定且可知.

例如, 今天的股价 S_n 是 \mathcal{F}_n 可测的;

明天的股价 S_{n+1} 通常不是 \mathcal{F}_n 可测的.

- ◇ 设 $S = \{S_n, n \geq 0\}$ 是一个随机过程. 若对任何 n , S_n 关于 \mathcal{F}_n 可测, 则称过程 S 关于 (\mathcal{F}_n) 是适应的. 记

$$\mathcal{F}_n^0 := \sigma(S_k, k \leq n),$$

称为 S 的自然流. 一个过程关于它的自然流总是适应的.



命题 2.1.1

(函数与依赖) Y 关于 $\sigma(X)$ 可测当且仅当 Y 是 X 的函数, 即

$\exists f$: Borel 函数(即“具体可以写出来”的函数), s.t. $Y = f(X)$.

类似地, 若 Y 关于 $\sigma(X_1, \dots, X_k)$ 可测, 则存在多元 Borel 函数 f , 使得

$$Y = f(X_1, \dots, X_k).$$

这时, 经常说 Y 依赖于 X_1, \dots, X_k .

注. 很多时候, 一个资产的收益不只取决于一只股票.

比如一个‘跨式期权’, 它的收益既取决于股票价格 S , 也取决于波动率 σ . 此时, 只要这个收益 Y 是由 S 和 σ 共同确定的, 那么 Y 就是这两个变量的函数: $Y = f(S, \sigma)$.

这就是所谓的 Y 依赖于 X_1, \dots, X_k 的信息.



例 1. (Portfolio) 如果 S 是股票价格, Y 是期权收益, 那么 Y 必须是 S 的函数, 比如

$$Y = (S - K)^+ = \max\{S - K, 0\}.$$

即, 期权收益 Y 依赖于(且仅依赖于)股票价格 X 的信息. $\#$

例 2. (不可测的反例) 假设 Y 是明天腾讯控股的股价, 而 X 是今天腾讯控股的股价. 请问 Y 是 X 的函数吗? 即 $Y = f(X)$ 成立吗?

不成立. 事实上, 即使我知道了今天的股价 X , 我也不能确定明天的股价 Y . 明天还有新的随机消息(新的 ω)进来. 故

明天的股价 Y 关于今天的信息 $\sigma(X)$ 是不可测的.



条件概率与条件期望的直观引入

引例. (动态决策与期望回报) 猫在有三个门的迷宫中,

- 如果选第一个门, 爬 2 个小时就可以出去了;
 - 如果选第二个门, 爬 1 个小时后回到原地;
 - 如果选第三个门, 爬 3 个小时后回到原地.
- (1) 如果是个傻猫, 每次到这个地方都随机选一个门, 问平均需要多少时间爬出去?
 - (2) 如果是个聪明猫, 之前选过的门不再选, 问平均需要多少时间爬出去?



注. 全概率公式的推广 —— 全期望公式:

假设 $\{B_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 是样本空间的一个划分, 则

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y|B_i]\mathbb{P}(B_i).$$

(注意, 该划分与随机变量 Y 有关.)



引例的解答

- (1) 用 Y 表示笨猫出去所需时间. X 是选的门, 那么
 $\mathbb{E}[Y|X=1] = 2$, $\mathbb{E}[Y|X=2] = 1 + \mathbb{E}[Y]$,
 $\mathbb{E}[Y|X=3] = 3 + \mathbb{E}[Y]$. 因此

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}(2 + 1 + \mathbb{E}[Y] + 3 + \mathbb{E}[Y]),$$

故得 $\mathbb{E}[Y] = 6$.

- (2) 聪明猫按选门的顺序有下面的可能: 1, 21, 31, 321, 231, 概率分别为 $1/3, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6$. 且 $\mathbb{E}[Y|1] = 2$,
 $\mathbb{E}[Y|21] = 3$, $\mathbb{E}[Y|31] = 5$, $\mathbb{E}[Y|321] = \mathbb{E}[Y|231] = 6$. 故

$$\mathbb{E}[Y] = 2/3 + 3/6 + 5/6 + 6/6 + 6/6 = 4.$$

聪明猫平均少走 2 个小时.



例 2.1.5 袋子 A, B 中分别有 n 个白球和 n 个黑球, 每次各取一球交换, 求 k 次交换之后 A 中的白球数之期望.

解. 用 X_i 表示 i 次交换之后 A 中的白球数, $i \geq 1, X_0 = n$, 则对 $\forall j \leq n$,

$$\mathbb{P}(X_i = j - 1 | X_{i-1} = j) = \frac{j^2}{n^2},$$

$$\mathbb{P}(X_i = j | X_{i-1} = j) = \frac{2j(n-j)}{n^2},$$

$$\mathbb{P}(X_i = j + 1 | X_{i-1} = j) = \frac{(n-j)^2}{n^2}.$$



条件期望为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i | X_{i-1} = j] &= (j-1) \frac{j^2}{n^2} + j \frac{2j(n-j)}{n^2} + (j+1) \frac{(n-j)^2}{n^2} \\ &= \left(1 - \frac{2}{n}\right)j + 1.\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[X_i | X_{i-1}] = \left(1 - \frac{2}{n}\right)X_{i-1} + 1.$$

然后对任意 $i \geq 1$, 得到递推



$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_i] &= (1 - 2/n)\mathbb{E}[X_{i-1}] + 1 \\
 &= (1 - 2/n)[(1 - 2/n)\mathbb{E}[X_{i-2}] + 1] + 1 \\
 &= \dots \\
 &= (1 - 2/n)^i \mathbb{E}[X_0] + \sum_{j=0}^{i-1} (1 - 2/n)^j \\
 &= (1 - 2/n)^i n + \frac{1 - (1 - 2/n)^i}{2/n} \\
 &= \frac{n}{2}(1 + (1 - 2/n)^i),
 \end{aligned}$$

最后

$$\mathbb{E}[X_k] = \frac{n}{2}[1 + (1 - 2/n)^k].$$



补充题. 一名矿工陷进一个有三扇门的矿井中. 第一扇门通到一个隧道, 走两小时后他可到达安全区; 第二扇门通到又一个隧道, 走三个小时会使他回到这个矿井中; 第三扇门通到再一个隧道, 走五个小时, 也会使他回到矿井中. 假定这矿工总是等可能地在三扇门中选一扇, 让我们计算矿工到达安全区地时间 X 的矩母函数 $\psi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.



注. 考虑到类似前面计算公式的局限性, 我们需要一种不依赖具体(分布的)计算公式, 只依赖“性质”的定义.

定理 2.1.2 实际给出了

条件期望一般性的定义

如果 ζ 是满足以下条件的随机变量:

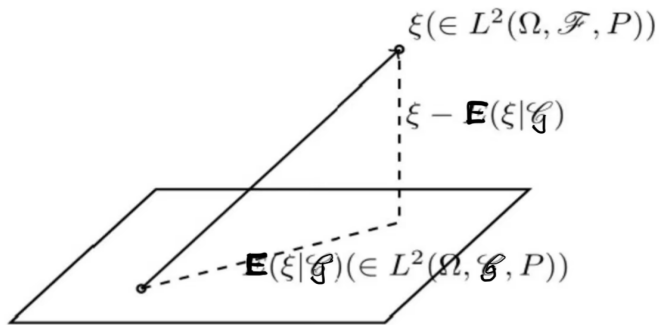
- ① (可测性) ζ 是 \mathcal{G} 可测的(即 ζ 只能依赖当前已知的信息);
- ② (无偏性) 对 $\forall A \in \mathcal{G}$, 误差与指示函数正交:

$$\mathbb{E}[(Y - \zeta)\mathbf{1}_A] = 0.$$

那么称 ζ 是基于信息集 \mathcal{G} 对 Y 的条件期望, 记为 $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.



$\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ 是基于当前信息 \mathcal{G} , 对 Y 的 最佳均方误差估计 (Best Mean Square Estimator, BMSE).



图示: 条件期望的几何意义



注释.

普通无偏: $\mathbb{E}[\hat{\theta} - \theta] = 0$, 不一定推出正交.

- ◇ 只约束了误差在全局空间地均值为 0, 没有切断误差与现有信息地相关性.

条件无偏: $\mathbb{E}[\hat{\theta} - \theta | \mathcal{G}] = 0$, 必然推出条件正交.

- ◇ 直接强制误差正交于整个已知信息子空间.

(本质根源: 可测变量能否从期望中提出来.)



例 2.1.6 假设一个值为 s 的信号从位置 A 发出, 在位置 B 被接收到的信号值服从参数是 $(s, 1)$ 的正态分布.
再假设从位置 A 发出的信号 S 服从参数是 (μ, σ^2) 的正态分布, 在位置 B 被接收到的信号值 $R = r$,
则对位置 A 发出的信号值的最优预测为多少?



解. 首先, 计算给定 R 的条件下 S 的条件密度函数

$$\begin{aligned} f_{S|R}(s|r) &= \frac{f_S(s)f_{R|S}(r|s)}{f_R(r)} = C'e^{-(s-\mu)^2/2\sigma^2} e^{-(r-s)^2/2}, \\ &= C \exp \left\{ - \left(s - \frac{\mu + r\sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 / \frac{2\sigma^2}{1 + 2\sigma^2} \right\}, \end{aligned}$$

其中, C 与 s 无关. 可以断定在接收信号值 r 一定的情况下, 按照最小化均方误差原则, 对发出信号的最优预测是

$$\mathbb{E}[S|R=r] = \frac{1}{1+\sigma^2}\mu + \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}r.$$

上式表明条件期望等于

信号的先验均值 μ 与接受信号 r 的加权平均,
其各自的权重之比为 $1:\sigma^2$.



核心性质：金融数学的“公理”

- ① (线性性) 交易组合的线性叠加:

$$\mathbb{E}[c_1X + c_2Y|\mathcal{G}] = c_1\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + c_2\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}].$$

- ② (迭代期望法则 / 塔性质)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[Y].$$

金融意义: 如果你今天对“明天的预期”再做一次预期, 结果就是“今天的值”. 这是无套利定价的基础.

- ③ (提出已知量)

$$\mathbb{E}[ZY|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \quad (\text{若 } Z \text{ 是 } \mathcal{G}\text{-可测}).$$

金融意义: 已经发生的现金流 Z 可以直接提出到期望外面(时间可分性).



独立性

若 Y 与 \mathcal{G} 独立, 则 $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y]$.

- ◇ (无用信息) 如果新的信息集 \mathcal{G} 与我们要预测的资产 Y 完全无关 (独立), 那么这个信息毫无价值, 预测值就是无条件期望.

嵌套性 (Nesting / Tower)

若 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, 则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_1].$$

- ◇ (懒人定理) 即使你明天获得了更多信息 \mathcal{G}_2 , 只要你回头看昨天基于 \mathcal{G}_1 做的预测, 那个预测值本身是不会变的.
- ◇ (相容性) 现在的预测必须与过去的预测相容.



Jensen 不等式: 风险与不确定性

(Jensen 不等式)

若 ϕ 是凸函数 (如 $\phi(x) = x^2$ 或 e^x) , 则

$$\phi(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(\xi)|\mathcal{G}].$$

- ◇ **金融解读(风险厌恶):** 对于一个风险厌恶的投资者(效用函数是凹的 $-\phi$),
确定性等价 (Certain Equivalent)总是小于期望收益.
即, 未来的不确定性是有“成本”的.



例 2.1.9 (二维正态分布与线性预测) 设 (X, Y) 服从标准二元正态分布, 相关系数为 r .

方法 1. (密度推导法) 计算得条件分布

$$Y|X = x \sim N(rx, 1 - r^2),$$

所以 $\mathbb{E}[Y|X = x] = rx$, 严格地 $\mathbb{E}[Y|X] = rX$.



方法 2. (正交分解法 (金融视角):) 因为 X, Y 是标准化的, 所以

$$\mathbb{E}[(Y - rX)X] = \text{cov}(Y, X) - r\text{cov}(X, X) = r - r = 0,$$

即 $Y - rX$ 与 X 正交 (不相关). 由于联合正态性, 不相关 \Rightarrow 独立.

(i) 独立性 $\Rightarrow \mathbb{E}[Y - rX|X] = \mathbb{E}[Y - rX] = 0$.

(ii) 因此 $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[rX|X] = rX$.

直觉: 在给定 X 的信息下, Y 最好的预测就是 X 的线性组合 rX , 剩下的部分 $Y - rX$ 是“噪声”, 与 X 完全无关. #



例 2.1.10 (复合随机过程) 设 $X = \{X_i\}$ 是独立同分布序列, N 是与 X 独立的非负整数值随机变量. 求随机和 $Y := \sum_{i=1}^N X_i$ 的期望与方差.

解. 利用全期望公式 (Tower Property):

$$\begin{aligned}\psi_Y(t) &:= \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tY} | N]] \\ &= \mathbb{E}[(\psi_X(t))^N] \quad (\text{生成函数的复合}).\end{aligned}$$



继续求矩:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|N]] = \mathbb{E}[N \cdot \mathbb{E}X_1] \\ &= \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1 \quad (\text{Wald 等式}).\end{aligned}$$

对于方差, 利用条件方差公式:

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \mathbb{E}[\text{Var}(Y|N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|N]) \\ &= \mathbb{E}[N \cdot \text{Var}(X_1)] + \text{Var}(N \cdot \mathbb{E}X_1) \\ &= \mathbb{E}N \cdot \text{Var}(X_1) + (\mathbb{E}X_1)^2 \cdot \text{Var}(N).\end{aligned}$$

#



考虑一个简单的掷硬币的游戏，正面赢 1 元，反面输 1 元。

引例. (直线上的随机游动) 设 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 是独立随机序列, 且

$$\mathbb{P}(\zeta_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\zeta_n = -1) = q = 1 - p.$$

令

$$X_0 = x, \quad X_n = X_{n-1} + \zeta_n, \quad n \geq 1,$$

称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是从 x 出发的简单随机游动. 注意到,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= X_n + \mathbb{E}[\zeta_{n+1}] \\ &= X_n + (p - q) \begin{cases} > X_n, & p > q \text{ (: 优势游戏,)} \\ = X_n, & p = q \text{ (: 公平游戏,)} \\ < X_n, & p < q \text{ (: 劣势游戏.)} \end{cases} \end{aligned}$$



公平性的核心:

在已知当前信息的情况下, 对未来的最佳预测就是维持现状(既不上涨也不跌).

金融中的公平性:

- ◇ 有效市场假说: 股票价格已经反映了所有可用信息, 因此未来的价格变动不可预测(即价格过程是鞅);
- ◇ 衍生品定价: 在风险中性测度下, 折现后的资产价格是一个鞅.

下面给出定义.



鞅的定义

定义 6.1.1

1. 随机过程 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 称为鞅, 若对任意 n , $\mathbb{E}|Z_n| < \infty$, 且

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n^0] = Z_n \quad (\text{或者等价地 } \mathbb{E}[Z_{n+1} - Z_n | \mathcal{F}_n^0] = 0.)$$

称 $\{Z_{n+1} - Z_n, n \geq 1\}$ 为鞅差序列.

2. 若 $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n^0] \geq Z_n$, 则称 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 称为下鞅.
3. 若 $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n^0] \leq Z_n$, 则称 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 称为上鞅.

◇ 直观含义: 在给定的信息下, 对财富增量的预期是零.



(见书中例 6.1.1.)

注意, 鞅并不一定需要是独立随机变量的和.

例 1. 赌硬币的正反面, 如下设计一种押法:

第一局押正面, 第二局开始总是押前一局出现的面.

那么

$$S_n := \zeta_1 + \zeta_1\zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-1}\zeta_n, \quad n \geq 1$$

是鞅.

#



升级版定义

定义 6.1.2

设有流 (\mathcal{G}_n) , (可积) 随机序列 $\{X_n : n \geq 0\}$ 称为关于 (\mathcal{G}_n) 是鞅或者 (\mathcal{G}_n) 鞅, 如果

- (1) $\{X_n\}$ 适应于流 (\mathcal{G}_n) ;
- (2) 对任何 n , 有

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n] = X_n.$$

(当不预先指定一个流时, 通常指随机序列的自然流而言.)

注. 事实上, 两个鞅的定义本质上没什么区别.



鞅的线性性质与不等式

- ① (同一个信息流下) 鞅的全体构成一个线性空间.
- ② 鞅的期望是常数, 下鞅的期望是 n 的非递减序列.

上鞅“期望向下”, 下鞅“期望向上”.

- ③ (由 Jensen 不等式)
 - (i) 若 X 是鞅, ϕ 是凸函数, 且 $\phi(X)$ 可积, 则 $\phi(X)$ 是下鞅.
例如, $|X|$, X^2 . 后者需要满足平方可积性.
 - (ii) 若 X 是下鞅, ϕ 是凸函数且单调递增, 则 $\phi(X)$ 也是下鞅.
例如, X^+ .



例 2. (资产价值的波动性)

设 (X_n) 是一个公平投资策略在第 n 天结束时的累计盈亏, 假设每一天的增量 ζ_{n+1} 是独立同分布的, 且

$$\mathbb{E}[\zeta_{n+1}] = 0, D(\zeta_{n+1}) = 1 \text{ (即每天平均赚 0 元, 但有波动).}$$

那么 $X_{n+1} = X_n + \zeta_{n+1}$. (数学上称 (X_n) 为**随机游动**.)

结论: 虽然 (X_n) 是鞅, 但 (X_n^2) (风险/波动性的度量) 是下鞅.

事实上,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n^0] &= \mathbb{E}[(X_n + \zeta_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n^0] \\ &= X_n^2 + 2X_n \mathbb{E}[\zeta_{n+1}] + \mathbb{E}[\zeta_{n+1}^2] = X_n^2 + 1 > X_n^2.\end{aligned}$$

- ◇ 这体现了风险与收益的关系: 虽然期望收益为 0, 但随着时间的推移, 风险(方差)在不断增加.



例 6.1.2 (Wald 鞅) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是前面提到的简单随机游动, $\{\xi_n\}$ 是独立随机序列, 记自然流为

$$\mathcal{B}_n = \sigma(\xi_k, k \leq n) = \sigma(X_k, k \leq n), n \geq 1.$$

对 $\lambda > 0$, 令

$$Y_n := \lambda^{X_n}, n \geq 0.$$

故

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{B}_n) &= \mathbb{E}(\lambda^{X_n + \xi_{n+1}} | \mathcal{B}_n) = \lambda^{X_n} \cdot \mathbb{E}(\lambda^{\xi_{n+1}} | \mathcal{B}_n) \\ &= Y_n \cdot \left(\lambda p + \frac{q}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

因此 $\{\lambda^{X_n} (\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n}, n \geq 0\}$ 是鞅序列, 称为 Wald 鞅. #

注. 当 $p \neq q$ 时, 取 $\lambda = \frac{q}{p}$, $\lambda p + \frac{q}{\lambda} = 1$, $\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right\}$ 是鞅序列.



例 6.1.3 (Doob 鞅) 设 ζ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的可积随机变量, $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ 是 \mathcal{F} 的一个信息流(filtration). 令

$$\zeta_n := \mathbb{E}[\zeta | \mathcal{F}_n], \quad n \geq 1,$$

那么 $\{\zeta_n, \mathcal{F}_n\}$ 是一个鞅, 称为 **Doob 鞅**.

例如, 假设 ζ 是一个待预测的随机变量, 现有一系列数据 Y_1, Y_2, \dots , 令

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n).$$

在给定 \mathcal{F}_n 时, 对 ζ 的最小均方误差预测正是条件期望 $\mathbb{E}[\zeta | \mathcal{F}_n]$. 也就是说, 随着观测信息的不断累积, ζ 的最佳预测 $\zeta_n = \mathbb{E}[\zeta | \mathcal{F}_n]$ 构成一个鞅. #



离散形式的随机积分

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: 概率空间, $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ 是流.

可预料过程

随机序列 $\{H_n : n \geq 0\}$ 称为是可预料的, 如果

- 1 H_0 是 \mathcal{F}_0 可测的;
- 2 对任何 $n \geq 1$, H_n 是 \mathcal{F}_{n-1} 可测的.

设 $\{X_n\}$ 是适应过程, $\{H_n\}$ 是可预料过程, 定义

$$Y_0 := H_0 X_0,$$

$$Y_n := Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

称为过程 H 关于 X 的随机积分, 是一般随机积分的离散形式.



鞅的基本定理

定理 6.2.1 (Doob)

设 X 是一个适应过程, H 是可预料有界过程.

- (1) 如果 X 是鞅, 那么过程 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是鞅.
- (2) 如果 X 是下鞅且 H 非负, 那么 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是下鞅.

证. 显然 Y_n 是可积的并且 \mathcal{F}_n 可测的, 且对 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}(H_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= H_n \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}).\end{aligned}$$

- (1) 如果 X 是鞅, 则右边是零, 即 Y 是鞅;
- (2) 如果 X 是下鞅且 H 非负, 则右边也非负, 即 Y 是下鞅.



停时的概念, 是概率论中最重要的概念之一. 记 I 为正整数集.

定义 6.2.1 (停时)

称值域为 I 的随机变量 T 为(相对于流 $(\mathcal{F}_n : n \in I)$ 的)停时, 如果

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in I.$$

例. (典型的停时: 首中时) 设 A 是 Borel 集, 定义

$$T := \inf\{n \in I : X_n \in A\},$$

则 T 是停时.

事实上, 是否在时刻 n 停止, 只依赖于到 n 时刻为止的信息:

$$\{T = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{X_{n-1} \notin A\} \cap \cdots \cap \{X_0 \notin A\} \in \mathcal{F}_n.$$



注意到, \mathcal{F}_n 关于 n 递增, 故

(1) T 是停时等价于

对任何 $n \in I$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

(2) 如果 T 与 S 是停时, 那么

$$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}.$$

命题.

如果 T 与 S 是停时, 那么 $T \wedge S$ 与 $T \vee S$ 也是停时.

(固定时间可视为停时.)



停止策略/过程:

设 T 是一个停时. 对于随机序列 $\{X_n : n \in I\}$, 自然地

在集合 $\{T = n\}$ 上, 定义 $X_T := X_n, n \in I,$

称为 X 在停时 T 处的位置.

定义 T -停止序列

$X_n^T(\omega) := X_{n \wedge T}(\omega), n \geq 0,$ 称之为停止过程.



Doob 有界停止定理(Optional Stopping Theorem, OST)

定理 6.2.2

(1) 如果 $\{X_n : n \in I\}$ 是鞅, T 是停时, 那么

停止序列 $\{X_n^T : n \in I\}$ 也是鞅.

(2) 如果 $\{X_n : n \in I\}$ 是鞅, T 是有界停时, 那么 $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$.

在公平游戏中, 任何“聪明的”停止策略都无法改变游戏的公平性.



注意到, 停时一般都不会是有界的.

◇ 研究什么情况下 $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$ 成立是非常有意义的问题.

(首先举个例子说明, 结论一般是不对的.)

例 6.2.1 (习题 6) 设 $\{X_n : n \geq 0\}$ 是直线上 0 出发的对称随机游动, 是鞅. 定义 T 是点 1 的首中时,

$$T := \inf\{n > 0 : X_n = 1\},$$

那么 $X_T = 1$,

$$\mathbb{E}X_T = 1 \neq 0 = \mathbb{E}X_0.$$

#



下面的定理说明在随机游动的场合, T 的可积性能保证等式成立.

定理 6.2.3 (Wald 等式)

设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是可积独立同分布随机序列且 $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, T 是可积停时, 则

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^T \xi_n\right] = 0.$$

证明的关键在于

利用 T 的可积性, 通过控制收敛定理将极限移到期望里面.



证*. 定义 $X_n := \sum_{i=1}^n \zeta_i$, $n \geq 1$, 是鞅. 由 Doob 停止定理,

$$\mathbb{E}X_{T \wedge n} = 0, \quad \forall n.$$

若 T 有界, 定理结论显然成立.

下面先证明当 T 可积时, X_T 可积. 事实上,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{T \wedge n} |\zeta_i| \right) = \mathbb{E}(T \wedge n) \cdot \mathbb{E}|\zeta_1|,$$

由单调收敛定理,

$$\mathbb{E}|X_T| \leq \mathbb{E} \sum_{i=1}^T |\zeta_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T \wedge n) \cdot \mathbb{E}|\zeta_1| = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}|\zeta_1| < \infty.$$



证*. (续) 进一步地,

$$0 = \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_T; T \leq n) + \mathbb{E}(X_n; T > n).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由控制收敛定理,

$$\text{右边第一项的极限} = \lim_n \mathbb{E}(X_T; T \leq n) = \mathbb{E}X_T.$$

另一方面,

$$\mathbb{E}(|X_n|; T > n) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^T |\zeta_i|; T > n\right),$$

因为 $\sum_{i=1}^T |\zeta_i|$ 可积, 故再用控制收敛定理推出

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \mathbb{E}(|X_n|; T > n) \rightarrow 0.$$

从而有 $\mathbb{E}X_T = 0$.



例 6.2.3 (输光问题) 考虑从 a 元开始的赌博, 目标是赢到 b 元或输到 0 元 ($0 < a < b$). 每次赌博输赢 1 元的概率各占一半. 问破产概率 $p_0 = \mathbb{P}(\text{输到 } 0 \text{ 元})$ 和平均赌博次数 $\mathbb{E}[\tau]$.

解. 设 X_n 表示第 n 次赌博后的资金,

$$\tau = \min\{n : X_n = 0 \text{ 或 } X_n = b\}.$$

由 OST, $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] = a$, 而 X_τ 只能取 0 或 b , 则

$$0 \cdot p_0 + b \cdot (1 - p_0) = a,$$

解得 $p_0 = 1 - a/b$.



下面计算平均赌博次数. 为此, 考虑鞅 $\{Y_n = X_n^2 - n, n \geq 0\}$.
利用 OST, 有 $\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[Y_0] = a^2$, 即

$$\mathbb{E}[X_\tau^2] - \mathbb{E}[\tau] = a^2,$$

而 $\mathbb{E}[X_\tau^2] = 0^2 \cdot p_0 + b^2 \cdot (1 - p_0) = b^2 \cdot \frac{a}{b} = ab$, 所以

$$\mathbb{E}[\tau] = ab - a^2 = a(b - a).$$

#



金融市场

首先, 注意一个金融市场上有两种东西:

1. 风险证券: 其价格记为

$\{X_n : n \geq 0\}$, 是个随机序列.

2. 可无风险存贷款的银行: 存贷款的收益由利率决定, 简单地假设存贷款利率是一样的, 都是 r , 即

存款 x , 下个时刻的价值是 $(1+r)x$.

($x > 0$ 表示存款, $x < 0$ 表示贷款.)



衍生证券的数学意义

通常, 期权是一个合约, 即

以某个敲定时刻 N 和某种敲定方式买卖证券的权利.

期权的价值 V 依赖于证券价格, 但在时刻 N 时是敲定的:

V 是 X_1, \dots, X_N 的函数, 即关于 $\sigma(X_1, \dots, X_N)$ 可测.



投资策略

假设在时刻 n , 投资者的财富为 Y_n ,

策略: 买 H_n 份证券,

$$\begin{cases} H_n > 0 \text{ 表示买入,} \\ H_n < 0 \text{ 表示卖空 (借证券卖出),} \end{cases}$$

剩下的钱存入银行. 即, 其财富分配如下:

$$Y_n = H_n X_n + (Y_n - H_n X_n).$$

↪ 下个时刻, 他的财富变成

$$Y_{n+1} = H_n X_{n+1} + (1+r)(Y_n - H_n X_n).$$

其中, $H_n X_{n+1}$ 是风险部分, $(1+r)(Y_n - H_n X_n)$ 是存款部分.



货币是有时间价值的.

引入符号:

$$\tilde{Y}_n = (1+r)^{-n} Y_n, \quad \tilde{X}_n = (1+r)^{-n} X_n,$$

(折现是为了消除无风险利率的影响, 让我们在‘同一起跑线’上比较不同时间点的资产价值.)

分别称过程 $\{\tilde{Y}_n, n \geq 0\}$, $\{\tilde{X}_n, n \geq 0\}$ 为折现后的财富过程和折现后的证券价格过程.

前面的随机积分变型, 得

$$\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n = H_n(\tilde{X}_{n+1} - \tilde{X}_n).$$

: 折现后的财富是策略关于折现后证券价格的随机积分.



无套利市场

假设:

- ① 市场给定: 资产价格过程 $\{X_n\}$ 和无风险利率 r 已知.
- ② 财富过程 $\{Y_n\}$ 由初始财富 Y_0 和交易策略 $\{H_n\}$ 决定.

定义 6.3.1: 有效市场/无套利市场

市场无套利, 是指不存在任何自融资策略 $\{H_n\}$ 策略和时刻 N , 使得

$$Y_0 = 0, Y_N \geq 0, \mathbb{P}(Y_N > 0) > 0$$

等价表述: 对任意策略 $\{H_n\}$ 和任意时刻 N , 如果 $Y_0 = 0$ 且 $Y_N \geq 0$, 则必有 $Y_N = 0$ a.s.



一个成熟的市场不可能存在套利机会.

数学上的表达需要提出等价鞅测度的概念.

注. (在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 可以有其它概率测度.)

如果 $\zeta > 0$, 且 $\mathbb{E}\zeta = 1$, 定义

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}[\zeta 1_A], \quad A \in \mathcal{F},$$

那么 $\tilde{\mathbb{P}}$ 也是概率测度. 显然这两个概率测度有相同的零概率事件, 即

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0.$$

此时称两个概率测度等价.

- 两个等价的概率测度会改变概率, 但不改变基本的随机特性, 不会把不可能变成可能, 也不会把可能变成不可能.

鞅的定义中概率测度是关键, 一个概率测度下的鞅在另一个测度下一般不是鞅.



定理 6.3.1 (第一基本定理)

市场有效当且仅当存在一个等价概率测度 \mathbb{P} , 在这个测度下,

折现后的证券价格过程 $\{\tilde{X}_n, n \geq 0\}$ 是鞅.

这个测度通常称为等价鞅测度.

注. 等价鞅测度其实就是风险中性测度.

在真实世界(\mathbb{P})里, 股票有趋势(漂移);

但在风险中性世界(\mathbb{Q})里, 所有资产的预期收益率都变成了无风险利率 r , 因此折现后的价格变成了鞅(无趋势).



由 $\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n = H_n(\tilde{X}_{n+1} - \tilde{X}_n)$ 可知,

推论

在测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, $\{\tilde{Y}_n, n \geq 0\}$ 也是鞅, 所以

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y_0] = (1+r)^{-N} \tilde{\mathbb{E}}[Y_N].$$

这里 $\tilde{\mathbb{E}}$ 表示关于概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 的期望.



例. ① 敲定价格为 K 的欧式买入期权:

不能提前执行, 必须在到期日执行.

故其到期的价值是 $(X_N - K)^+$, 在 0 时刻的价格是

$$\tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-N}(X_N - K)^+].$$

② 美式买入期权: 与欧式买入期权的区别是它可提前执行.
若在一个停时 $\tau \leq N$ 执行, 则它在 N 时刻的价值是

$$(1+r)^{N-\tau}(X_\tau - K)^+,$$

在 0 时刻的价格是

$$\tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\tau}(X_\tau - K)^+].$$



Claim: 美式买入期权提前执行不如在最后到期日执行:

$$\tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\tau}(X_{\tau}-K)^+] \leq \tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-N}(X_N-K)^+],$$

直观上, 因为持有期权的时间越长, 不确定性越大(波动性增加), 而在风险中性测度下, 这种不确定性对应着下鞅的性质, 所以越晚执行(N)的期望价值越高.

证. 在等价测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, $\{\tilde{X}_n\}$ 是鞅, 所以

$$(1+r)^{-n}(X_n-K)^+ = (\tilde{X}_n - (1+r)^{-n}K)^+,$$

而 $(1+r)^{-n}K$ 递减, 故 $\{\tilde{X}_n - (1+r)^{-n}K\}$ 是下鞅. 又由 $x \mapsto x^+$ 是凸且递增的函数, 所以

$$\{(1+r)^{-n}(X_n-K)^+, n \geq 0\} \text{ 是下鞅.}$$

但是 $\tau \leq N$, 由定理 6.2.2, 命题得证. □



考虑如下简单市场(这是连接理论与实践的桥梁):

二叉树模型/二项式模型

设 $\{X_n : n \geq 0\}$: 风险证券价格(常为正), $\eta_n := \frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}}$: 涨幅.
假设涨幅是独立同分布的: 令 $\zeta_n := 1 + \eta_n (= X_n / X_{n-1} > 0) \sim$

$$\mathbb{P}(\zeta_n = u) = p > 0, \mathbb{P}(\zeta_n = d) = q = 1 - p > 0.$$

其中, ζ_n 的两个可能值 $u, d : u > d > 0$.

问题: 什么条件下市场是有效的? 什么条件下市场是完备的?

(利率仍设为 r , \tilde{X} 是 X 的折现过程. 记 (\mathcal{G}_n) 为 $\{X_n\}$ 的自然流.)



有效市场是指存在等价鞅测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 使得

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{X}_n | \mathcal{G}_{n-1}] = \tilde{X}_{n-1} \quad (= \tilde{X}_{n-1}(1+r)^{-1} \tilde{\mathbb{E}}[\zeta_n]) \quad \Rightarrow$$

存在等价鞅测度等价于, 存在等价概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$, 使得

$$\tilde{\mathbb{E}}[\zeta_n] = 1 + r.$$

(等价测度只会改变 p 的值.) 设 $\tilde{\mathbb{P}}(\zeta_n = u) = \tilde{p}$. 当

$$u\tilde{p} + d(1 - \tilde{p}) = 1 + r$$

时, (\tilde{X}_n) 在概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 之下是鞅.

市场有效的充分必要条件是 $u > 1 + r > d$.



事实上,

- ① 上面方程当且仅当 $u > 1+r > d$ 时有解 $\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$.
- ② 概率的约束: 因为 \tilde{p} 是概率, 必须满足 $0 < \tilde{p} < 1$.
- ③ 推导不等式:
 - 要使 $\tilde{p} > 0$, 必须 $1+r-d > 0 \implies r > d-1$ (即 $1+r > d$).
 - 要使 $\tilde{p} < 1$, 必须 $1+r-d < u-d \implies 1+r < u$.
- ④ 得出最终结论:

资产的收益率必须分布在无风险利率的两侧. 而且等价鞅测度是唯一的, 即**市场完备**(所有风险均可被对冲掉).

注. \tilde{p} 不是真实概率 p , 而是为了构造鞅而调整出来的**风险中性概率**.



刚才证明了市场有效(无套利), 现在讨论市场是否完备.

一个完备市场简单说, 就是

- ◇ 无论你想赌什么, 市场上都有工具让你去赌. 或者说,
- ◇ 无论衍生品的收益函数 V 长什么样, 我都能用股票和债券把它复制出来.

市场完备性的核心金融含义: 所有或有权益都能被基础资产复制, 因此定价唯一.



二叉树模型下的鞅表示与市场完备性

考虑一步二叉树模型($N = 1$), 简单起见设利率为 0, 此时无风险收益 $1 + r = 1$.

- ◇ 未来只有两个状态(涨 u 或跌 d).
- ◇ 衍生证券 $V = V(X_1) = V(X_0 \xi_1)$.

核心问题: 是否存在自融资策略 (H_0, Y_0) , 使得

$$V(X_0 \xi_1) = H_0(X_1 - X_0) + Y_0 = H_0 X_0 (\xi_1 - 1) + Y_0?$$

即, 能否用股票和债券完美复制出该衍生品的收益.



根据两个状态列出方程组:

$$\begin{aligned} V(X_0u) &= H_0X_0(u-1) + Y_0, \\ V(X_0d) &= H_0X_0(d-1) + Y_0. \end{aligned}$$

有如下唯一解:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{V(X_0u) - V(X_0d)}{X_0(u-d)}, \\ Y_0 &= \frac{(u-1)V(X_0d) + (1-d)V(X_0u)}{u-d} = \tilde{\mathbb{E}}[V]. \end{aligned}$$

(这验证了第二基本定理(定理 6.3.2): 在二叉树模型中, 市场有效且完备, 对应的等价鞅测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 是唯一的.)



补充题. 设无风险利率 $r = 0$, 股价过程 $\{S_n, n = 0, 1, \dots, N\}$ 在风险中性测度 \mathbb{Q} 下是鞅, 且满足:

$$S_0 = s_0, S_n = S_{n-1} \cdot \zeta_n,$$

其中 $\zeta_n, n \geq 1$ 独立同分布于

$\mathbb{Q}(\zeta_n = u) = p = 1 - \mathbb{Q}(\zeta_n = d)$, 且 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\zeta_n] = 1$ (因为 $r = 0$). 定义美式看涨期权: 到期日 N 敲定价为 K , 可在任意 $0 \leq n \leq N$ 行权, 收益为 $(S_n - K)^+$. 令

$$V_n := \max\{(S_n - K)^+, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

为 n 时刻的期权价值.

1. 证明: $\{V_n, n \geq 0\}$ 在 \mathbb{Q} 下是上鞅;
2. 用 Jensen 不等式说明: 美式看涨期权在无红利股票上不会提前行权;
3. 设 $N = 2, s_0 = 100, u = 1.1, d = 0.9, K = 105$, 求 V_0 .

